SUBJECT:

المعادلة التفاضلية التامة وعوامل التكميل :

المعادلات التفاضلية التامة :

تعريف : نقول عن المعادلة التفاضلية والتي من شكل :

$$p(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \quad \boxed{1}$$

أنها تامة إذا أمكن إيجاد دالة ولتكن :

$$dF(x,y) = p(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \quad \boxed{2}$$

وسنوجد الاختبار الذي يمكن بواسطته الحكم على أن المعادلة $\boxed{1}$ تامة أم لا وذلك كما يلي :

ومن المعلوم أن تفاضل :

$$dF(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} \quad (3)$$

ونفرض أن دالة f دالة مستمرة من المتحولين (x,y) فإن :

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\cdot\partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\cdot\partial x} \quad (4)$$

وبمقارنة العلاقتين $\boxed{2}$ و $\boxed{3}$ نجد أن المشتق :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= p(x,y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= Q(x,y) \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

مشتق الجزئي F بالنسبة لـ x

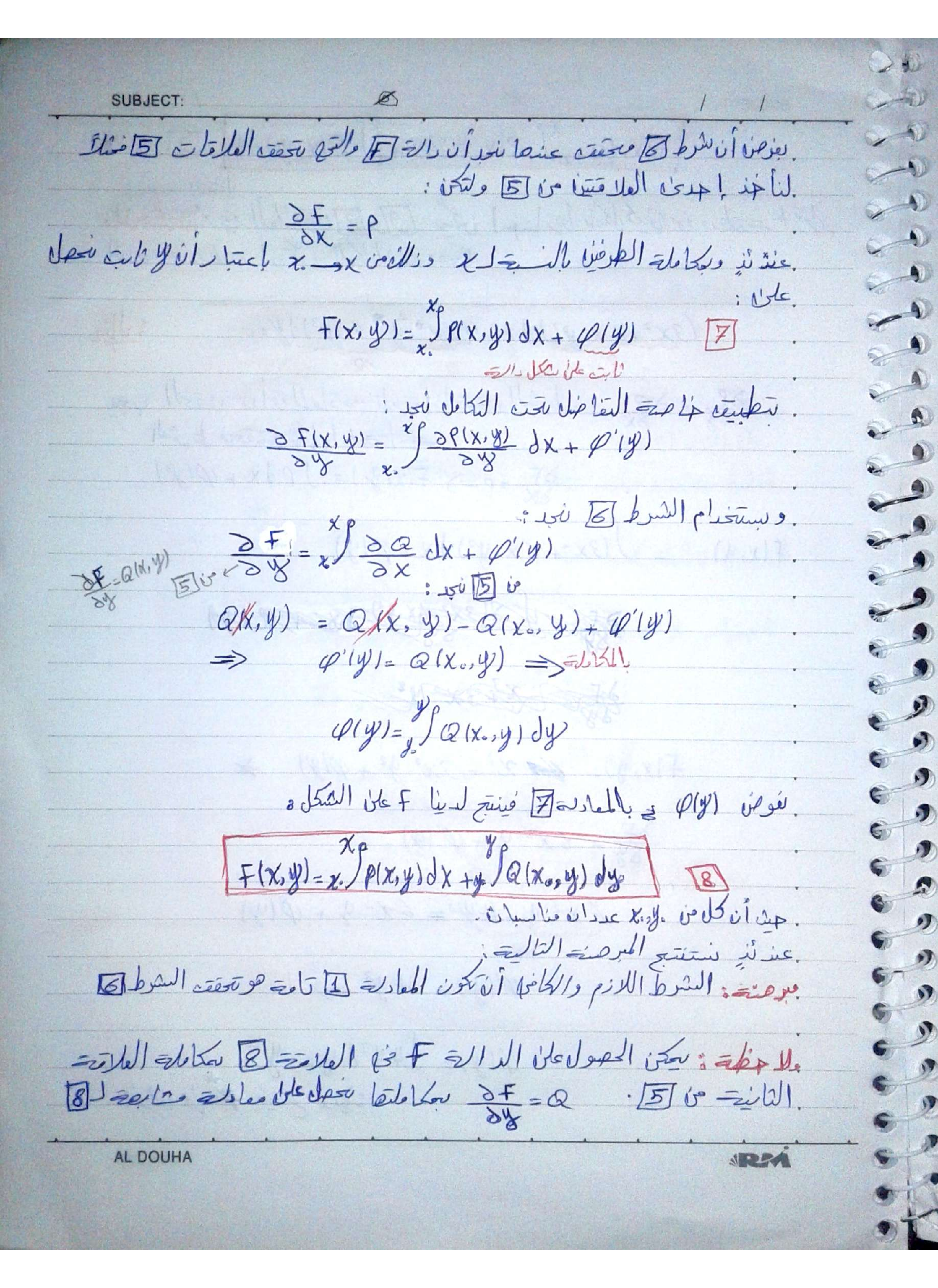
وبالاستفادة من العلاقة $\boxed{4}$ نحصل على الشرط التالي :

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}} \quad (6)$$

والعلاقة $\boxed{6}$ هو الشرط اللازم لتكون المعادلة $\boxed{1}$ صحيحة ،

الآن سنبين أن الشرط $\boxed{6}$ هو كافي وكذلك (كفاية الشرط) :

AL DOUHA



بفرض أن شرط [6] محقق عندها نجد أن دالة [F] والتي تحقق العلاقات [5] فمثلاً لنأخذ إحدى العلاقتين من [5] ولتكن :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P$$

عندئذٍ وبمكاملة الطرفين بالنسبة لـ x وذلك من x_0 ← x باعتبار أن y ثابت نحصل على :

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \varphi(y) \qquad [7]$$

ثابت على شكل دالة

تطبيق خاصة التفاضل تحت التكامل نجد :

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx + \varphi'(y)$$

وباستخدام الشرط [6] نجد :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx + \varphi'(y)$$

$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$ من [5]

من [5] نجد :

$$Q(x,y) = Q(x,y) - Q(x_0,y) + \varphi'(y)$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = Q(x_0,y) \Rightarrow$$ بالمكاملة

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy$$

نعوض $\varphi(y)$ في بالمعادلة [7] فينتج لدينا F على الشكل :

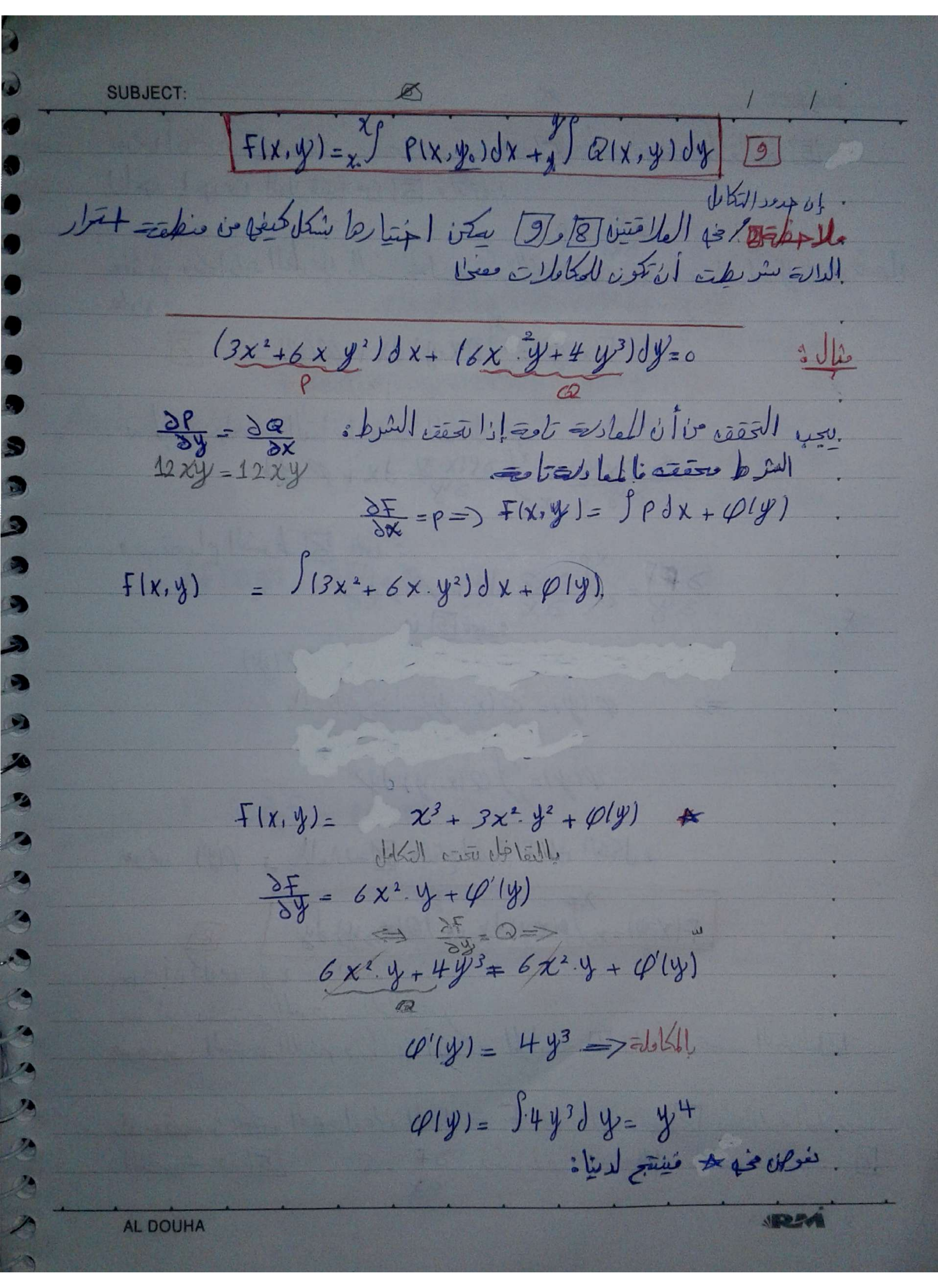
$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy \qquad [8]$$

حيث أن كل من x_0, y_0 عددان مناسبان.

عندئذٍ نستنتج المبرهنة التالية :

مبرهنة : الشرط اللازم والكافي أن تكون المعادلة [1] تامة هو تحقق الشرط [6]

ملاحظة : يمكن الحصول على الدالة F في العلاقة [8] بمكاملة العلاقة الثانية من [5] . $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$ بمكاملتها نحصل على معادلة مشابهة لـ [8]



$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy \qquad \boxed{9}$$

ملاحظة: إن حدود التكامل في العلاقتين [8] و [9] يمكن اختيارها بشكل كيفي من منطقة استمرار الدالة شريطة أن تكون للمكاملات معنى.

مثال:

$$(3x^2+6xy^2)\,dx + (6x^2y+4y^3)\,dy = 0$$

($P = 3x^2+6xy^2$ ، $Q = 6x^2y+4y^3$)

يجب التحقق من أن المعادلة تامة إذا تحقق الشرط:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$12xy = 12xy$$

الشرط محقق فالمعادلة تامة.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \Rightarrow F(x,y) = \int P\,dx + \varphi(y)$$

$$F(x,y) = \int (3x^2 + 6x\cdot y^2)\,dx + \varphi(y)$$

$$F(x,y) = x^3 + 3x^2\cdot y^2 + \varphi(y) \quad ★$$

بالتفاضل تحت التكامل

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 6x^2\cdot y + \varphi'(y)$$

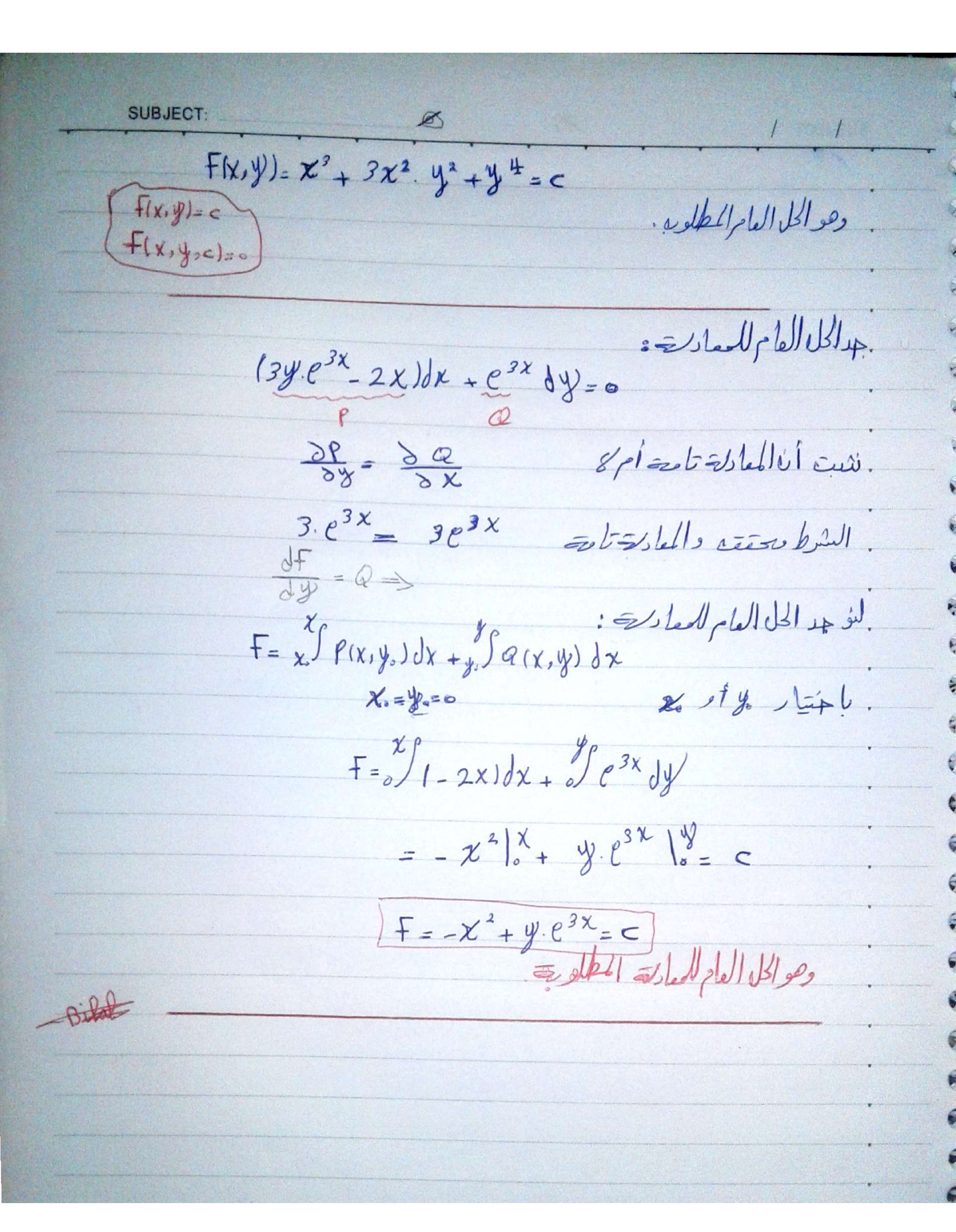
$$\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = Q \Rightarrow$$

$$6x^2\cdot y + 4y^3 = 6x^2\cdot y + \varphi'(y)$$

$$\varphi'(y) = 4y^3 \Rightarrow \text{بالمكاملة}$$

$$\varphi(y) = \int 4y^3\,dy = y^4$$

نعوض في ★ فينتج لدينا:



SUBJECT:

$F(x,y) = x^3 + 3x^2 \cdot y^2 + y^4 = c$

وهو الحل العام المطلوب.

$f(x,y) = c$
$f(x,y,c) = 0$

جد الحل العام للمعادلة:

$(3y \cdot e^{3x} - 2x)dx + e^{3x}\, dy = 0$

P Q

نثبت أن المعادلة تامة أم لا

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

الشرط متحقق والمعادلة تامة

$3 \cdot e^{3x} = 3e^{3x}$

$\frac{dF}{dy} = Q \Rightarrow$

لنوجد الحل العام للمعادلة:

$F = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\, dx$

باختيار y_0 أو x_0

$x_0 = y_0 = 0$

$F = \int_0^x (-2x)\, dx + \int_0^y e^{3x}\, dy$

$= -x^2 \Big|_0^x + y \cdot e^{3x} \Big|_0^y = c$

$F = -x^2 + y \cdot e^{3x} = c$

وهو الحل العام للمعادلة المطلوبة

Bilal